第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ.

(1)　$f(x)=-x+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　$\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(3)　$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t-2)|dt$ を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ．

(1)　a を正の定数とする．

$$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$$

を満たす関数 $f(x)$ がただ１つしか存在しないように定数 a の値を定めよ．また，そのときの $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(t)=\int_t^{t+1}|x^2-1|dx$ の値を最小にする t の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=-3+2\sqrt{3}$，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}$

㋑　$a=3-2\sqrt{3}$，$f(x)=(3-2\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

㋒　$a=-3-2\sqrt{3}$，$f(x)=-(3+2\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}$

(2)　㋐　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　㋑　$t=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$　　㋒　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ．

（1）　$f(x)=-x+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

（2）　$\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

（3）　$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t-2)|dt$ を求めよ．

【答】 （1）$f(x)=-x+\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$　（2）$f(x)=3x^2-6x$，$a=0$，3

（3）$f(x)=\begin{cases} x^2-x-\dfrac{2}{3} & (x\leqq -1,\ x\geqq 2) \\ -\dfrac{2}{3}x^3+x^2+x+\dfrac{2}{3} & (-1<x<0) \\ -x^2+x+\dfrac{2}{3} & (0\leqq x\leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-x^2-x+2 & (1<x<2) \end{cases}$

【解答】

（1）　定数 k を用いて $\int_0^1\{f(t)\}^2dt=k$ とおくことができるので，$f(x)=-x+k$ と表せる．

このとき

$$k=\int_0^1\{f(t)\}^2dt=\int_0^1(-t+k)^2dt$$
$$=\int_0^1(t^2-2kt+k^2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-kt^2+k^2t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-k+k^2$$

より，$k^2-2k+\dfrac{1}{3}=0$　　∴　$k=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

よって　$\boldsymbol{f(x)=-x+\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}}$

（2）　与式に $x=a$ を代入して $0=a^3-3a^2$ すなわち $0=a^2(a-3)$　　∴　$\boldsymbol{a=0,\ 3}$

与式を x で微分することにより，$\boldsymbol{f(x)=3x^2-6x}$

（3）　$x\leqq -1$，$x\geqq 2$ のとき

$$f(x)=\int_x^{x+1}(t^2-2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_x^{x+1}$$
$$=x^2-x-\frac{2}{3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$-1<x<0$ のとき

$$f(x)=\int_x^0(t^2-2t)dt+\int_0^{x+1}(-t^2+2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_x^0+\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^{x+1}$$
$$=-\frac{2}{3}x^3+x^2+x+\frac{2}{3}$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_x^{x+1}(-t^2+2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_x^{x+1}$$
$$=-x^2+x+\frac{2}{3}$$

$1<x<2$ のとき

$$f(x)=\int_x^2(-t^2+2t)dt+\int_2^{x+1}(t^2-2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_x^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^{x+1}$$
$$=\frac{2}{3}x^3-x^2-x+2$$

以上より，$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-x-\frac{2}{3} & (x\leqq -1,\ x\geqq 2) \\ -\frac{2}{3}x^3+x^2+x+\frac{2}{3} & (-1<x<0) \\ -x^2+x+\frac{2}{3} & (0\leqq x\leqq 1) \\ \frac{2}{3}x^3-x^2-x+2 & (1<x<2) \end{cases}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　面積以外の積分計算

13　次の各問いに答えよ．

(1)　a を正の定数とする．

$$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$$

を満たす関数 $f(x)$ がただ１つしか存在しないように定数 a の値を定めよ．また，そのときの $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(t)=\int_t^{t+1}|x^2-1|\,dx$ の値を最小にする t の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=-3+2\sqrt{3}$，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}$

　　㋑　$a=3-2\sqrt{3}$，$f(x)=(3-2\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

　　㋒　$a=-3-2\sqrt{3}$，$f(x)=-(3+2\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}$

(2)　㋐　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　㋑　$t=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$　　㋒　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋒

【解答】

(1)　定数 k を用いて $k=\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ とおくと

$$f(x)=ax+k$$

と表せるので

$$k=\int_0^1(at+k)^2dt=\left[\frac{1}{3a}(at+k)^3\right]_0^1=\frac{1}{3a}\{(a+k)^3-k^3\}$$

$$\therefore\quad 3ak=a^3+3a^2k+3ak^2$$

$$3k^2+3(a-1)k+a^2=0\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x)$ がただ１つだけ存在するには①の実数解 k は重解であればよいので，判別式より

$$9(a-1)^2-12a^2=0$$

$$a^2+6a-3=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-3+2\sqrt{3}}\qquad(a>0\text{ より})$$

このときの重解 k は

$$k=-\frac{a-1}{2}=2-\sqrt{3}$$

となるので

$$\boldsymbol{f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(Ⅰ)　$t \leqq -2$ のとき

$$f(t)=\int_t^{t+1}(x^2-1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_t^{t+1}=t^2+t-\frac{2}{3}$$

より，$f'(t)=2t+1<0$ すなわち $f(t)$ は単調減少.

よって $t \leqq -2$ のとき $f(-2) \leqq f(t)$

(Ⅱ)　$-2<t\leqq -1$ のとき

$$f(t)=\int_t^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{t+1}(-x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_t^{-1}+\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{t+1}=-\frac{2}{3}t^3-t^2+t+2$$

より，$f'(t)=-2t^2-2t+1$ となるので，$f(t)$ の増減は

t	-2	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	-1
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

となる．よって $-2<t\leqq -1$ のとき $f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\leqq f(t)$

これより　$f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)<f(-2)$，$f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)<f(-1)$

(Ⅲ)　$-1<t\leqq -\frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_t^{t+1}(-x^2+1)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_t^{t+1}=-t^2-t+\frac{2}{3}$$

より，$f'(t)=-2t-1\geqq 0$ すなわち $f(t)$ は単調増加.

よって $-1<t\leqq -\frac{1}{2}$ のとき $f(-1)<f(t)$

(Ⅰ)～(Ⅲ)より，$t\leqq -\frac{1}{2}$ のとき $f(t)$ は $t=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ において最小となる.

$y=|x^2-1|$ のグラフは y 軸に関して対称であるので，$y=f(t)$ のグラフは直線 $t=-\frac{1}{2}$ に関して対称となる．したがって

$$t+1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\quad すなわち\quad t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

のときにも最小となる．よって，求める t の値は

$$\boldsymbol{t=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。